

۱- معرفی مجموعه:

هرگاه تعدادی شیء یا عدد را کنار هم قرار دهیم یک «مجموعه» بدست می‌آید. به عنوان نمونه، مجموعه عددهای فرد یک رقمی به صورت:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

است. توجه داشته باشید:

➤ به اعداد یا اشیاء داخل مجموعه «عضو» گوئیم. به عنوان نمونه؛ عدد ۳ عضو مجموعه A بوده و عدد ۶ عضو آن نیست. لذا می‌نویسیم:

$$3 \in A \quad \text{و} \quad 6 \notin A$$

➤ برای نوشتن یک مجموعه، اعضای آن را داخل دو آکولاد $\{ \}$ نوشته و بین اعضای مجموعه ویرگول انگلیسی « , » قرار می‌دهیم.

اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a, b, 5, 7\}$ در نظر بگیریم برای نشان دادن که a

عضوی از مجموعه A است می نویسیم $a \in A$ و می خوانیم a عضو A است .

چون عدد ۴ عضو مجموعه نیست می نویسیم $4 \notin A$ و می خوانیم ۴ عضو A نیست.

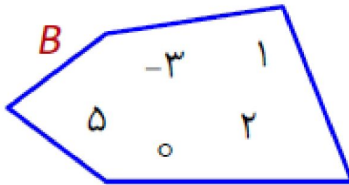
تذکر:

می توان یک مجموعه را به صورت تصویری یا هندسی نمایش داد؛ به این صورت که:

➤ یک شکل هندسی مثلاً چند ضلعی یا دایره در نظر می گیریم.

➤ اعضای مجموعه را داخل آن می نویسیم.

به عنوان نمونه، مجموعه $B = \{-3, 0, 1, 2, 5\}$ را می توان به صورت زیر نشان داد:



به چنین نمایشی از یک مجموعه «**نمودار ون**» گفته می شود.

نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون:

- مجموعه را می‌توان با استفاده از منحنی‌های بسته نمایش داد.

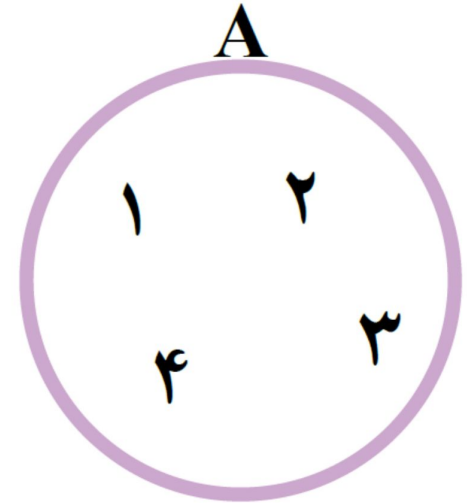
- فیلسوف

- منطق‌دان

- ملیت بریتانیایی

- اختراع در سال ۱۸۸۱

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$



جان ون



به این نوع نمایش از مجموعه‌ها، نمودار ون گفته می‌شود.

نکته مهم:

➤ برای آنکه تعدادی شیء یا عدد تشکیل مجموعه دهند لازم است: اشیاء و اعضای مجموعه «مشخص» یا «معین» باشند!

یعنی: در مورد هر شیء یا عدد دلخواه، دقیقاً معلوم باشد که آیا عضو آن مجموعه است یا خیر. به عبارت دیگر: تعیین اعضای مجموعه به نظر و سلیقه افراد بستگی نداشته باشد! به عنوان نمونه‌ها:

(الف) عبارت «اعداد طبیعی کوچکتر از ۶» یک مجموعه معرفی می‌کند؛ زیرا: دقیقاً عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شرط داده شده را داشته و اعضای مجموعه هستند.

(ب) عبارت «پنج عدد طبیعی» یک مجموعه معرفی نمی‌کند؛ زیرا: دقیقاً معلوم نیست که کدام عددها جزء آنها هستند و کدام‌ها جزء آنها محسوب نمی‌شوند.

نکته:

به دو مطلب زیر در مورد مجموعه‌ها توجه کنید:

➤ اعضای یک مجموعه را متمایز در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

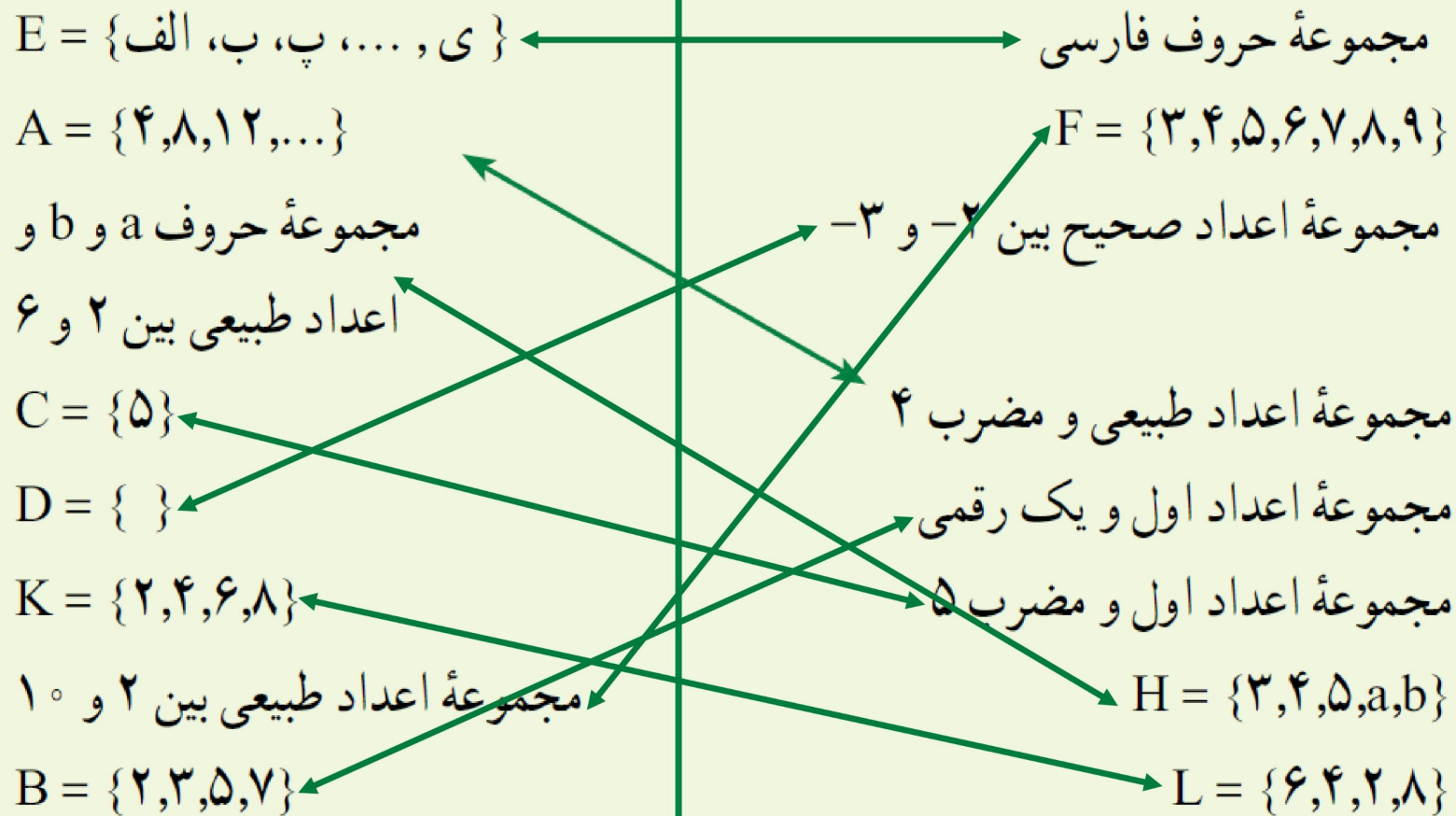
در صورتی که مجموعه عضو تکراری داشته باشد، فقط یکبار محسوب (شمرده) شده و تکرار آن را حذف می‌کنیم!

به عنوان نمونه؛ مجموعه $B = \{۳,۵,۳\}$ دارای دو عضو است و آن را به صورت $B = \{۳,۵\}$ می‌نویسیم.

➤ ترتیب نوشتن اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.

به عنوان نمونه؛ مجموعه‌های $\{a,b,c\}$ و $\{c,a,b\}$ کاملاً یکسان هستند.

۴- مانند نمونه کامل کنید :



تعریف:

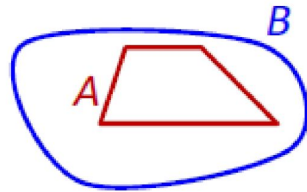
هرگاه مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، به آن مجموعه «تهی» گفته و آن را با \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

به عنوان نمونه:

چون اعداد طبیعی مثبت هستند؛ مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از صفر برابر تهی است.

۲- مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها:

زیرمجموعه: دو مجموعه A و B را در نظر بگیرید. هرگاه هر عضو از مجموعه A در B هم قرار داشته باشد، گوئیم A «زیرمجموعه» B است و می‌نویسیم:



$$A \subseteq B$$

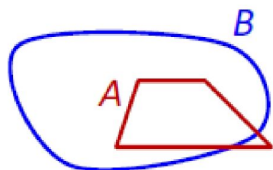
اگر این شرط برقرار نباشد، A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم:

$$A \not\subseteq B$$

نکته:

اگر بدانیم $A \not\subseteq B$ در این صورت به دو مطلب مهم زیر می‌توان اشاره کرد:

- ممکن است بسیاری از اعضای A در مجموعه B هم باشند؛ اما:
- لااقل یک عضو در A هست که در B قرار ندارد.



شکل مقابل را ببینید:

به عنوان نمونه‌ای دیگر؛ برای مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. چون $1 \in A$ است ولی $1 \notin B$. در نتیجه در این دو مجموعه عبارت $A \not\subseteq B$ صحیح است. (ولی سایر عضوهای A در B هستند!)

نتیجه:

در مورد هر مجموعه A به دو مورد زیر می توان اشاره کرد:

➤ $A \subseteq A$; یعنی هر مجموعه ای زیرمجموعه خودش است.

➤ $\emptyset \subseteq A$; یعنی تهی زیرمجموعه تمام مجموعه ها است.

توجه کنید که گاهی برخی از اعضای یک مجموعه، خودشان نیز مجموعه هستند.

مثال: تمام زیرمجموعه های مجموعه $A = \{۲, a\}$ را بنویسید.

$\{\}$ $\{۲\}$ $\{a\}$ $\{۲, a\}$

همه مجموعه های ممکن را می نویسیم:

لذا مجموعه داده شده ۴ زیرمجموعه دارد.

نتیجه:

در مثال قبل، یک حقیقت جالب و مهم دیده می‌شود. مجموعه $A = \{2, a\}$ دارای ۲ عضو بود و تعداد ۴ زیرمجموعه و مجموعه $B = \{1, 2, \{3\}\}$ ۳ عضو و ۸ زیرمجموعه دارد. عدد ۴ همان 2^2 و عدد ۸ همان 2^3 است.

در واقع، بین تعداد اعضای مجموعه و تعداد زیرمجموعه‌ها همیشه این رابطه‌ی توانی برقرار است:

اگر مجموعه‌ای دارای n عضو باشد، دارای 2^n زیرمجموعه است!

تساوی مجموعه‌ها:

هرگاه اعضای دو مجموعه A و B کاملاً یکسان باشند، دو مجموعه را «برابر» یا «مساوی» گفته و می‌نویسیم:

$$A = B$$

توجه کنید که A و B هنگامی برابر هستند که عبارت‌های $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هر دو درست باشند.

مثال: اگر $A = \{x+y, 2, 1\}$ و $B = \{2, 2x, 3\}$ دو مجموعه برابر باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

باید عضوهای A و B یکسان باشند. با توجه به اینکه عدد ۲ در هر دو مشترک است، دو عضو دیگر را با هم برابر

قرار داده و معادله‌های بدست آمده را حل می‌کنیم:

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$x + y = 3 \xrightarrow{x = \frac{1}{2}} \frac{1}{2} + y = 3 \rightarrow y = \frac{5}{2}$$

نمایش مجموعه‌ها به زبان (نماد) ریاضی:

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

این مجموعه، دو زیرمجموعه مهم دارد:

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

اعداد طبیعی فرد

و

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

اعداد طبیعی زوج

تعریف: دو مجموعه مهم دیگر از اعداد به صورت زیر بیان می‌شوند:

➤ اگر عدد صفر را به مجموعه اعداد طبیعی بیفزائیم، مجموعه «**اعداد حسابی**» بدست می‌آید:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

➤ حال اگر قرینه تمام عددهای طبیعی را نیز به مجموعه W بیفزائیم، مجموعه «**اعداد صحیح**» مشخص

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

خواهد گردید:

نکته:

چون هر عدد زوج به صورت مضرب ۲ است، می توان عضوهای E را به صورت زیر نوشت:

$$2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots$$

مشاهده می کنید که عضوهای E تمام عددهای به صورت $2 \times k$ هستند که در آن $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ عددی طبیعی است. به عبارت دیگر مجموعه E را می توان به صورت زیر نوشت:

$$E = \{2k \mid k \text{ عددی طبیعی}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

به طور کاملاً مشابه، اعداد طبیعی فرد $1, 3, 5, \dots$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots \Rightarrow O = \{2k - 1 \mid k \text{ عددی طبیعی}\} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

نکته:

قبلاً دیده‌ایم که اعداد گویا تمام کسرهایی هستند که صورت و مخرج آنها دو عدد صحیح بوده و مخرج آنها غیر صفر است. این مجموعه را با \mathbb{Q} نشان داده و لذا می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

و همواره داریم: $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z}$ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

مثال : مجموعه $A = \{5n + 3 | n \in \mathbb{N}\}$ را با اعضا مشخص کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	...
$5n + 3$...

بنابراین داریم : $A = \{۸, ۱۳, ۱۸, ۲۳, ۲۸, ۳۳, ۳۸, \dots\}$

مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی

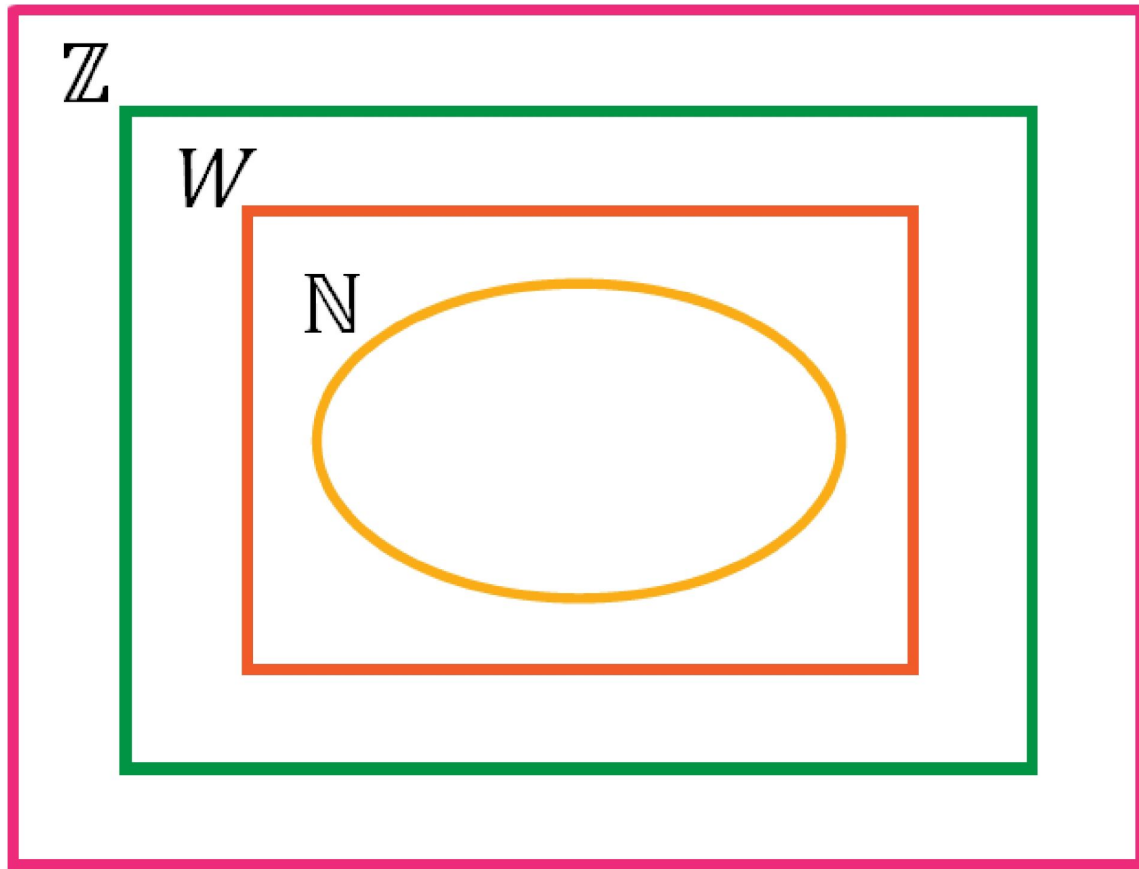
$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

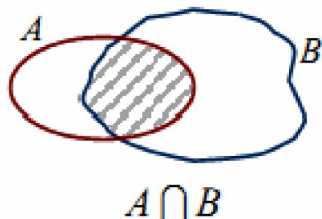
مجموعه اعداد گویا

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$



۳- اشتراک، اجتماع و تفاضلِ مجموعه‌ها:

برای دو مجموعه A و B ، «**اشتراک**» آنها مجموعه تمام اعضای است که هم در A و هم در B قرار داشته باشند. این مجموعه را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهیم. بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

مثال: اگر $C = \{۳, -۱, ۶\}$ و $B = \{۰, ۲, ۴\}$ و $A = \{-۱, ۲, ۰, ۴\}$ مجموعه‌های $A \cap B$ ، $B \cap C$ و $A \cap C$ را مشخص کنید.

عضوهای مشترک مجموعه‌ها را در هر حالت می‌نویسیم:

$$A \cap B = \{-۱, ۲, ۰, ۴\} \cap \{۰, ۲, ۴\} = \{۰, ۲, ۴\}$$

$$B \cap C = \{۰, ۲, ۴\} \cap \{۳, -۱, ۶\} = \emptyset$$

$$A \cap C = \{-۱, ۲, ۰, ۴\} \cap \{۳, -۱, ۶\} = \{-۱\}$$

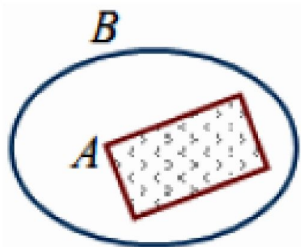
نکته:

در مورد مجموعه‌های A و B به موارد ساده زیر می‌توان اشاره کرد:

➤ اشتراک هر مجموعه با خودش برابر همان مجموعه است: $A \cap A = A$

➤ واضح است که تهی با هیچ مجموعه‌ای عضو مشترک ندارد: $A \cap \emptyset = \emptyset$

➤ اگر $A \subseteq B$ باشد، اشتراک آنها برابر مجموعه کوچکتر یعنی A است:

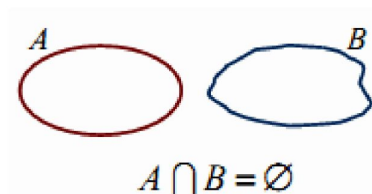


$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

(در مثال قبل $B \subseteq A$ بوده و در نتیجه $A \cap B = B$ شده است!)

تذکر:

ممکن است دو مجموعه عضو مشترک نداشته باشند که در این صورت آنها را «جدا از هم» یا «مجزا» گویند:



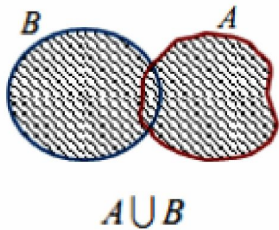
به عنوان نمونه در مورد مجموعه اعداد طبیعی فرد 0 و مجموعه اعداد طبیعی زوج E داریم:

$$0 \cap E = \emptyset$$

اجتماع دو مجموعه:

«اجتماع» دو مجموعه A و B را با $A \cup B$ نشان داده و آن شامل تمام اعضایی است که لااقل در یکی از A و B قرار داشته باشند. بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$



توجه کنید که $A \cup B$ از کنار هم قرار دادن اعضای دو مجموعه بدست می‌آید و البته: **اعضای تکراری فقط یک بار نوشته می‌شوند!**

مثال: اگر $C = \{3, -1, 6\}$ و $B = \{0, 2, 4\}$ و $A = \{-1, 2, 0, 4\}$ ، مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cup C$ را مشخص کنید.

عضوهای مجموعه‌ها را در هر حالت کنار هم می‌نویسیم:

$$A \cup B = \{-1, 2, 0, 4\} \cup \{0, 2, 4\} = \{-1, 2, 0, 4\}$$

$$A \cup C = \{-1, 2, 0, 4\} \cup \{3, -1, 6\} = \{-1, 2, 0, 4, 3, 6\}$$

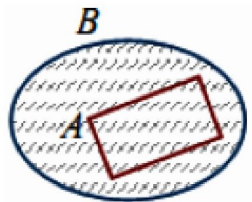
نکته:

در مورد اجتماع مجموعه‌ها به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:

➤ اجتماع هر مجموعه با خودش برابر همان مجموعه است: $A \cup A = A$

➤ واضح است که اجتماع تهی با هر مجموعه‌ای روی آن مجموعه بی‌اثر است: $A \cup \emptyset = A$

➤ اگر $A \subseteq B$ باشد، اجتماع آنها برابر مجموعه بزرگتر یعنی B است:



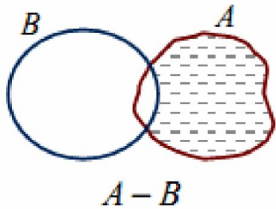
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

(در مثال قبل $B \subseteq A$ بوده و در نتیجه $A \cup B = A$ شده است!)

تفاضل دو مجموعه:

«تفاضل» مجموعه B از A را با $A - B$ نشان داده و آن مجموعه‌ای است شامل تمام عضوهایی است که: «در A هستند» ولی «در B قرار ندارند».

با نماد ریاضی می‌توان نوشت:



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

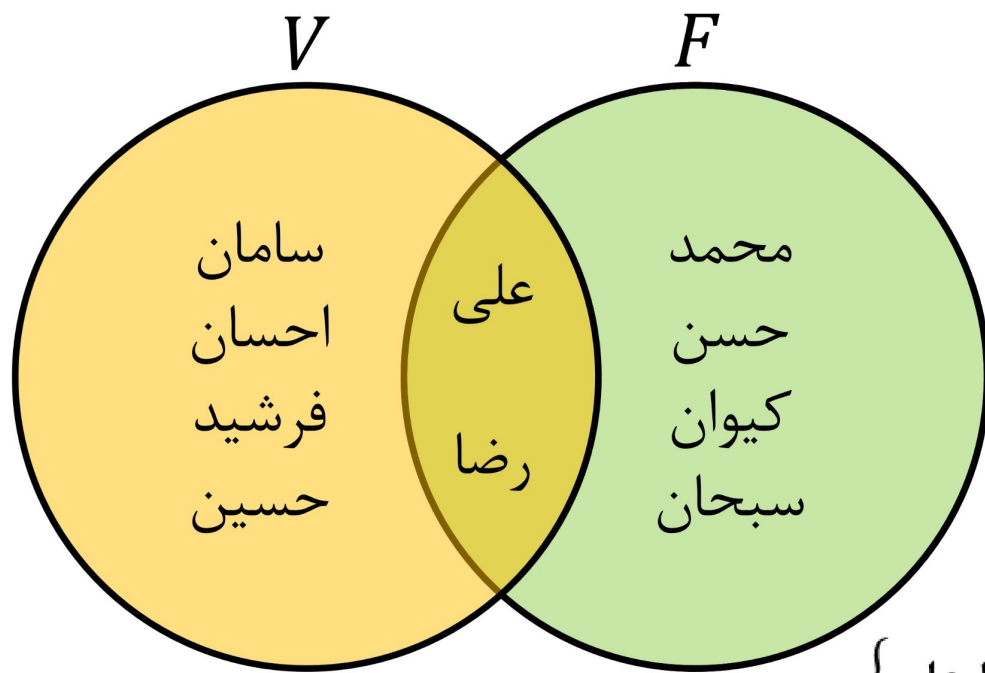
توجه کنید که مجموعه $B - A$ نیز شامل اعضای است که در B بوده ولی در A نیستند.

مثال: با توجه به مجموعه‌های $A = \{-1, 2, 5, 6\}$ و $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ، مجموعه $B - A$ را با اعضایشان مشخص کنید.

برای تعیین $B - A$ ، به اعضای B نگاه کرده و فقط هر کدام که در A نیستند را می‌نویسیم:

$$B - A = \{2, 3, 5, 7\} - \{-1, 2, 5, 6\} = \{3, 7\}$$

۱- در یک کلاس درس، علی و رضا عضو هر دو تیم والیبال و فوتبال بوده و سامان، احسان، فرشید و حسین فقط در تیم والیبال و سبوحان فقط در تیم فوتبال بازی می کنند.



$$V = \{ \text{حسین, فرشید, احسان, سامان, رضا, علی} \}$$

$$F = \{ \text{سبوحان, کیوان, حسن, محمد, رضا, علی} \}$$

$$\{ \text{رضا, علی} \}$$

دانش آموزانی که در هر دو تیم عضویت دارند .

دانش آموزانی که حداقل در یکی از دو تیم عضویت دارند .

$$\{ \text{سبوحان, کیوان, حسن, محمد, حسین, فرشید, احسان, سامان, رضا, علی} \}$$

مجموعه‌ای تشکیل دهید که هر عضو آن عضو تیم والیبال باشد ولی عضو تیم فوتبال نباشند (فقط در تیم والیبال بازی کنند) این مجموعه را « V منهای F » می‌نامیم و با نماد $V - F$ نمایش می‌دهیم.

$$V = \{ \text{علی, رضا, سامان, احسان, فرشید, حسین} \} \quad F = \{ \text{علی, رضا, محمد, حسن, کیوان, سبحان} \}$$

$$V - F = \{ \text{سامان, احسان, فرشید, حسین} \}$$

$$F - V =$$

قرار داد : تعداد عضوهای هر مجموعه مانند A را با $n(A)$ نمایش می دهیم . به

عنوان مثال، اگر A مجموعه ای k عضوی باشد می نویسیم $n(A) = k$

۴- مجموعه‌ها و احتمال:

به مجموعه $A = \{0, 1, 2, 3, 3, \dots, 9\}$ توجه کنید. این مجموعه دارای ۱۰ عضو است و به همین دلیل می‌نویسیم:

$$n(A) = 10$$

بنابراین $n(A)$ **تعداد عضوهای** مجموعه A را نشان می‌دهد.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 5, 1\}$ باشند، مقادیر $n(A \cup B)$ و $n(B - A)$ را مشخص کنید.
هر دو مجموعه را تشکیل می‌دهیم:

$$B - A = \{5\} \quad \text{و} \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$n(B - A) = 1 \quad \text{و} \quad n(A \cup B) = 4$$

در نتیجه:

تعریف:

در درس ریاضی سال هشتم، با مفهوم احتمال برخی پیشامدها آشنا شدیم. در این بخش، مفاهیم پایهٔ احتمال را با استفاده از مجموعه‌ها و با دقت بیشتری معرفی خواهیم کرد. یک آزمایش شانسى مثلاً پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید:

➤ مجموعهٔ تمام نتایج ممکن در انجام این آزمایش را با S نشان می‌دهیم. بنابراین در این نمونه:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعهٔ S «**فضای نمونه‌ای**» نام دارد، ولی کتاب درسی ریاضی سال نهم به این اصطلاح اشاره نداشته است! ➤ در هر آزمایش، هدف تعیین احتمال برخی اتفاقات خاص مورد نظر (مطلوب) است. اعضای یک حال مطلوب را داخل یک مجموعه نوشته و به آن یک «**پیشامد**» یا «**پیشامد تصادفی**» گوئیم. در نتیجه: «پیشامدها زیر مجموعه‌هایی از S هستند و آنها را با حروف بزرگ A, B, C و ... نشان می‌دهیم.»

نکته:

احتمال رخ دادن یک پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آنکه عدد ظاهر شده:

(الف) مضرب ۵ باشد. (ب) کوچکتر از ۵ باشد. (ج) عدد اول دو رقمی باشد.

مجموعه $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر گرفته و توسط آن هر پیشامد را تعیین می‌کنیم:

الف) تنها عددی در S که مضرب ۵ باشد، عدد ۵ است:

$$A = \{5\} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

ادامه مثال قبل:

ب) اعداد کوچکتر از ۵ که در S هستند، پیشامد این قسمت را مشخص می‌کنند:

$$B = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} \rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

ج) توجه کنید که هیچ عددی در S دو رقمی نیست و بنابراین پیشامد این قسمت تهی است:

$$C = \{ \} \rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{0}{6} \rightarrow P(C) = 0$$

گاهی آزمایش مورد بحث دارای دو نوع نتیجه یا حتی بیشتر است؛ در چنین حالت‌هایی لازم است مجموعه S و پیشامدهای آن را به صورتی خاص و مناسب بنویسیم. به تفاوت دو مورد بعدی توجه کنید.

مثال:

در پرتاب یک سکه مجموعه S چنین نوشته می‌شود: $S = \{ر, پ\}$ که در آن «ر» نشان دهنده ظاهر شدن روی سکه و «پ» نشان دهنده پشت سکه است.

مثال: فرض کنید دو سکه را پرتاب کرده‌ایم. مجموعه S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را محاسبه کنید.
الف) هر دو سکه رو بیاید. **ب)** فقط یک سکه پشت بیاید.

فرض کنید در سکه اول رو و در سکه دوم پشت ظاهر شده باشد؛ این نتیجه را در S به صورت زیر نشان خواهیم داد: **(پ, ر)**

بنابراین تمام حالات ممکن به صورت زیر S را تشکیل می‌دهند:

$$S = \{(ر, ر), (پ, ر), (ر, پ), (پ, پ)\} \rightarrow n(S) = 4$$

ادامه مثال قبل:

الف) حالتی که هر دو سکه رو آمده باشد، فقط یک حالت است:

$$A = \{(r, r)\} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

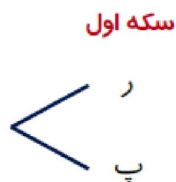
ب) با توجه به S ، پیشامد آنکه فقط یک سکه پشت بیاید را می‌نویسیم:

$$B = \{(p, r), (r, p)\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

نکته:

روشی آسان برای نوشتن مجموعه S هنگامی که اعضای آن دو یا چند نتیجه را نشان می‌دهند، استفاده از «**نمودار درختی**» به صورت زیر است. به عنوان نمونه، وقتی دو سکه پرتاب می‌شود:

➤ سکه اول می‌تواند رو یا پشت ظاهر شود:



➤ در هر یک از دو حالتی که برای سکه اول رخ می‌دهد، سکه دوم ممکن است رو یا پشت ظاهر گردد:



مشاهده می‌کنید که حرکت از چپ به راست،

تمام عضوهای S را مشخص می‌کند.